УДК 621.643.2, 622.276

ISSN 1729-4428

А.П. Олійник

Розробка методу інтерполяції осей криволінійних циліндричних тіл за інформацією про переміщення та способи навантаження тіла

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
вул. Карпатська, 15, Івано-Франківськ, 76019, Україна, тел.4-80-00, e-mail:duol@il.if.ua

Розглянуто існуючі методи інтерполяції кривих, що моделюють деформовані осі трубопроводів, виявлено їх переваги та недоліки, сфери використання. Запропоновано новий метод інтерполяції даних на основі кубічного інтерполяційного сплайну та кусково-лінійної інтерполяції з використанням умови неперервності першої та другої похідних функції.

Ключові слова: діагностика, відтворення кривих, інтерполяція, згладжування, сплайн з напруженями, навантаження.

Стаття поступила до редакції 19.09.2004; прийнята до друку 20.10.2004.

Існує клас задач технічної діагностики складних систем (трубопроводи різного призначення, нафтове обладнання, фундаменти та елементи конструкцій), в яких необхідно визначити значення певних фізико-механічних полів в досліджуваній області за відомими їх значеннями на деякій частині вказаної області. При цьому використовуються різні інтерполяційні та апроксимаційні процедури, серед яких традиційними є інтерполяційні кубічні сплайни [1,2]. Питання оцінки точності інтерполяції інтерполяційнимим кубічними сплайнами досліджувались багатьма авторами [3,4], результатом цих досліджень був висновок про те, що вирішальне значення при оцінці точності інтерполяції відіграє точність задання умов інтерполяції, яка лінійно впливає на абсолютну похибку інтерполяційної процедури. Задачі технічної діагностики характеризуються саме недостатньою точністю визначення координат вузлових точок (x_i, y_i), де x_i – координата точки на відрізку інтерполяції, y_i – значення відповідного фізико-механічного поля в даній точці. Частково вказана проблема вирішується шляхом використання згладжуючого інтерполяційного кубічного сплайну, який на відрізку інтерполяції [a; b] мінімізує на класі двічі неперервно диференційованих функцій, інтегрованих з квадратом, наступний функціонал [1]:

$$\Phi(u)=\int_a^b\left[u''(x)\right]^2dx+\sum_{k=0}^{n}p_k\left[u(x_k)-y_k\right]^2, \qquad (1)$$

де p_k – деякі додатні числа, які називаються ваговими коефіцієнтами. Чим більші значення p_k, тим точніше задовільняються умови інтерполяції, які можуть бути сформульовані у вигляді:

$$u(x_k)=y_k,\ k=0,1,\ldots,n. \qquad (2)$$

При побудові функціоналу (1) так вирішенні задачі його мінімізації використовуються різні способи задання вагових коефіцієнтів p_k. В тих випадках, коли відомою є точність вимірювання значень y_k ,згладжування кривої проводиться до тих пір, поки не будуть виконуватись умови для згладжуючого сплайну на j-му кроці ітераційної процедури $u_{(x)}^{(j)}$:

$$\left|u^{(j)}(x_k)-y_k\right|<\varepsilon,\quad k=0,1,\ldots,n, \qquad (3)$$

де j – номер кроку ітераційної процедури, k – номер точки на відрізку інтерполяції, ε – точність, з якою вимірюються координати y_k . Умова (2) встановлює, що відхилення теоретичної кривої від виміряних координат не повинно перевищувати точність вимірювання координат. Якщо на деякому кроці ітераційного процесу умова (2) не виконується, значення вагового коефіцієнта на новому кроці ітераційної процедури визначається за формулою [3]:

$$p_k^{(j+1)}=p_k^{(j)}\cdot\frac{\varepsilon}{\left(u^{(j)}(x_k)-y_k\right)}=p_k^{(j)}\cdot\delta_j\,.$$

Вказаний підхід широко використовується в задачах технічної діагностики магістральних трубопроводів [3], проте не завжди величина ε може бути задана. Збіжність вказаної ітераційної процедури гарантується тим, що в процесі його реалізації, як випливає з умови (3), величина

$0 < \delta_j < 1$, тобто виконується умова стискуваності відображення, яке задає ітераційний процес. Наведений спосіб задання p_k має свої недоліки, оскільки реальні значення ε часто не дозволяють одержати задовільні з точки зору точності результат інтерполяції, і, крім того, на кожному кроці інтерполяційної процедури необхідно будувати інтерполяційний кубічних сплайн, що вимагає значних обчислювальних ресурсів, особливо в тих випадках, коли кількість точок x_k є заданою: $k \approx 20 - 30$. Для вирішення задачі побудови лінії за її координатами, визначеними в вузлових точках (x_k, y_k), при великих значеннях k, пропонується наступна методика. Знаходиться мінімум функціоналу виду [4]:

$$\Phi_1(u) = \int_a^b \left\{ [u''(x)]^2 \cdot A + [u'(x)]^2 \cdot B \right\} dx, \qquad (4)$$

де A та B – деякі постійні величини. Вказаний підхід реалізується в роботах А.К. Кляйна [4], якщо B = 0, то вирішення задачі (3) з умовами інтерполяції (2) приводить до інтерполяційного кубічного сплайну, якщо ж A = 0, то умови $u(x_k) = y_k$ призводять до кусково лінійної інтерполяції. Лінію, яка доставляє екстремум (4) називають сплайном з напруженням, оскільки умова мінімізації функціоналу (4) записується у вигляді:

$$Au^{(IV)} - Bu'' = 0,$$

який характеризує деформацію лінії осі прямого стержня, стисненого повздовжньою силою при умові $A = \frac{1}{2}EI$; $B = -p$, де E – модуль Юнга, I – момент інерції січення; p – повздовжня сила. В залежності від знаку величини A та B умова мінімуму функціоналу (4) записується у вигляді:

$$u^{(IV)} - k^2 u'' = 0, \quad \frac{B}{A} > 0, \qquad (5)$$

$$u^{(IV)} + k^2 u'' = 0, \quad \frac{B}{A} < 0. \qquad (6)$$

Розв’язок (5) записується у вигляді:

$$u(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{-kx} - \frac{C_3}{k^2} x - \frac{C_4}{k^2}, \qquad (7)$$

розв’язок (6) записується у формі:

$$u(x) = C_1 \cdot \cos kx + C_2 \cdot \sin kx + \frac{C_3}{k^2} x - \frac{C_4}{k^2}. \qquad (8)$$

Формули (7), (8) містять чотири невідомі величини C_i, які знаходяться з умов інтерполяції (2). При цьому існують алгоритми визначення C_i з точним виконанням умов (2) [4], які ефективно використовуються в тих випадках, коли виконання умов (2) є строго необхідним. Проте в реальних задачах умови (2) не завжди визначаються точно, тому для визначення коефіцієнтів C_i , i = 1, 2, 3, 4 доцільно використати метод найменших квадратів, реалізація якого пов’язана із знаходженням екстремуму функцій чотирьох змінних виду [5]:

$$F_1(C_1, C_2, C_3, C_4) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \left(C_1 \cdot e^{kx_i} + C_2 \cdot e^{-kx_i} - \frac{C_3}{k^2} x_i - \frac{C_4}{k^2} - y_i \right)^2 \cdot \alpha_i \qquad (9)$$

в тому випадку коли $\frac{B}{A} > 0$, і:

$$F_2(C_1, C_2, C_3, C_4) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \left(C_1 \cdot \cos kx + C_2 \cdot \sin kx + \frac{C_3}{k^2} x - \frac{C_4}{k^2} . - y_i \right)^2 \cdot \alpha_i \qquad (10)$$

якщо $\frac{B}{A} < 0$. Вагові коефіцієнти $\alpha_i > 0$ вибираємо таким чином, щоб мінімізувати вплив похибки вимірювання значень y_i в точках x_i. Рівняння для визначення коефіцієнтів C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ одержують шляхом запису умови екстремуму функції $F_1(C_1, C_2, C_3, C_4)$ та $F_2(C_1, C_2, C_3, C_4)$:

$$\frac{F_1}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \qquad \frac{F_2}{\partial C_i} = 0, i = 1, 2, 3, 4 . \qquad (11)$$

Після розв’язання систем (11) та визначення коефіцієнтів C_i формули (7), (8) можуть бути використані не тільки для моделювання просторового положення лінії, але і для вирішення задачі діагностики об’єктів, що можуть моделюватись як стержні, що зазнають дії повздовжніх сил: у випадку, коли порівнюються два розв’язки задачі про знаходження положення деформованої осі об’єкта, наявність різниці між результатами для модельного та реального тіла може свідчити про появу дефектів в реальному тілі в процесі його експлуатації. Розроблена методика знаходження коефіцієнтів C_i в формулах (7), (8) дозволяє моделювати поведінку тіла з дефектами при різних місцях локалізації останніх – при цьому порівнюються точні розв’язки задачі (4) для коректно поставлених граничних умов та заданих коефіцієнтів з оціненими за методикою (9) – (11) розв’язками виду (7), (8), які встановлюються за експериментально визначеними парами значень (x_k, y_k).

Серед всіх неперервних разом з похідними до другого порядку включно функцій інтерполяційний кубічний сплайн мінімізує функціонал на відрізку інтерполяції [a; b] [2] :

$$F(u) = \int_a^b u''^2(x) dx$$

при умові (2) і заданих умовах на границях відрізка [a;b]. Цей факт, який називається екстремальною властивістю інтерполяційних кубічних сплайнів, обумовлює широке використання цього апарату для вирішення задач інтерполяції, проте при розв’язанні задач інтерполяції або визначення функцій, які моделюють деформування протяглих тіл типу стержнів та балок, осесиметричних видовжених тіл (трубопроводів різного призначення, ліній електропередач, валів тощо) використання сплайнів, що мінімізують функціонал (4), більш точно відповідає фізичному змісту задачі. Це стосується тих випадків, коли величини A, B в (4) характеризують певний стан деформованої системи. Розглядаючи сплайн з напруженнями, який мінімізує (4), можна запропонувати наступний варіант згладжування кривої, яка будується за заданими умовами інтерполяції (2): з використанням заданих умов інтерполяції (2) будується звичайний інтерполяційний кубічний сплайн і кусково-лінійна інтерполяційна функція – тобто, вирішується задача мінімізації функціоналу (4) при умовах B = 0 та A = 0 відповідно з урахуванням умов інтерполяції (2). Результатом інтерполяції є функції $S_i(x)$ та $l_i(x)$ $i = 1,...,n$, де n – кількість відрізків розбиття $h_i = x_i - x_{i-1}$. На кожному відрізку розбиття будується функція:

$$C_i(x) = (1-\lambda_i)\cdot l_i(x) + \lambda_i S_i(x), \quad \lambda \in [0;1] \tag{12}$$

Умови інтерполяції (2) виконуються в кожній точці x_k, проте функція $C_i(x)$ в загальному випадку не є неперервною разом зі своїми похідними першого та другого порядку в вузлах інтерполяції x_k. Для подолання цієї проблеми існує багато методик – наприклад, розглянемо відрізок $[x_k - \varepsilon;\ x_k + \varepsilon]$, який містить вузлову точку x_k.

На цьому відрізку функцію $C_i(x)$ замінюємо многочленом Ерміта, який будується за умовами:

$$\begin{aligned}
&H_6(x_k-\varepsilon) = C_k(x_k-\varepsilon), \quad H_6(x_k) = y_k \quad && H_6(x_k+\varepsilon) = C_{k+1}(x_k+\varepsilon),\\
&H_6'(x_k-\varepsilon) = C_k'(x_k-\varepsilon), && H_6'(x_k+\varepsilon) = C_{k+1}'(x_k+\varepsilon),\\
&H_6''(x_k-\varepsilon) = C_k''(x_k-\varepsilon), && H_6''(x_k+\varepsilon) = C_{k+1}''(x_k+\varepsilon).
\end{aligned} \tag{13}$$

Умови (13) дозволяють одержати інтерполяційний поліном Ерміта 6-го степеня, причому в точці x_k він має неперервні похідні до шостого порядку включно. Якщо в умовах (13) не вимагається виконання умов на другі похідні $H_6''(x)$, то одержаний многочлен Ерміта буде мати четверту степінь. Іншим способом одержання неперервної кривої разом зі своїми похідними до другого порядку виключно є побудова згладжуючого інтерполяційного кубічного сплайну з більшою кількістю вузлів: крім умов (2) використовуються умови:

$$U(x^k) = C_i(x^k), \quad x^k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Побудована за правилом (12) функція $C_i(x)$ шляхом вибору параметра λ дозволяє більш точно в порівнянні з інтерполяційним кубічним сплайном наближати криві, які моделюють осі деформованих тіл, що зазнають характерних навантажень (зосереджені сили; повздовжні та поперечні зусилля; реакції основ тощо), і для опису яких використовуються розв'язки варіаційних задач виду (4).

За результатами проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

– використання інтерполяційних кубічних сплайнів за умов неточного задання значень функцій, що інтерполюються, в вузлових точках призводить до значних похибок в обчисленнях реальних конфігурацій тіл;

– згладжуючі інтерполяційні сплайни обмежені в використанні через невизначеність способу вибору валових коефіцієнтів, а в тих випадках, коли відомою є точність вимірювання значень функцій у вузлах, існуючі алгоритми вибору валових коефіцієнтів суттєво залежать від вказаного рівня точності вимірювання;

– використання сплайнів з напруженнями дозволяє проводити інтерполяцію кривих з урахуванням особливостей фізичної картини процесу деформування, а використання методу найменших квадратів для обробки результатів експериментальних вимірювань дозволяє розробити методи визначення місця розташування дефектів для об'єктів з відомою картиною процесу навантаження;

– розроблено новий спосіб побудови інтерполяційної процедури, який базується на комбінації інтерполяційного кубічного сплайну та кусково-лінійної інтерполяції з використанням інтерполяційних поліномів Ерміта для знаходження необхідного рівня гладкості функцій. Він дозволяє відтворювати осі симетричних протяглих тіл, до яких належать трубопроводи різного призначення.

[1] Г.И. Марчук. *Методы вычислительной математики*. Наука, М., 608 с. (1989).

[2] А.А. Самарский, А.В. Гулин. *Численные методы*. Наука, М., 432 с. (1989).

[3] И.В. Перун. *Магистральные трубопроводы в горных условиях*. Наука, М., 175 с. (1987).

[4] A.K. Cline. Scalar and Planar Valued Curve Fitting Using Splines Under Tension // *Communications of the ACM*, **17**(4), pp. 218-228 (apr 1974).

[5] P.F. Paland, S. Jin. Locating Structural Damage by Detecting Boundary Effects // *Journal of Soundand Vibration,* **213**(4), pp. 1079-1110 (2000).

A.P. Olijnyk

The Curvilinear Cylindrical Bodies Axes Interpolation Method Design Using the Information About Body's Displacement and Loading Mode

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas,
15, Karpatska Str., 76000, Ivano-Frankivsk

The existing interpolation methods for the pipeline's strained axes modeling curves are considered taking to consideration one's advantages and disadvantages and the area of using. The new method of interpolation is given based on the cubic interpolational splines and the piecewise linear interpolation using the continuity conditions for the first and second derivatives.