

УДК 621.382.53

ISSN 1729-4428

В.Г. Охрем, А.А. Ащеулов<sup>1</sup>, О.А. Охрем<sup>1</sup>

## Замкнуті термоелектричні струми та поперечна термо-е.р.с. в електроізолюваному зонально-неоднорідному середовищі

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна  
E-mail: oe-dpt@chnu.com.ua

<sup>1</sup>Інститут термоелектрики НАН і МОН України, А/с 86, Головношта, Чернівці, 58002, Україна

Розраховано розподіл температури та електричного потенціалу в зонально-неоднорідному середовищі, в якому мають місце замкнуті термоелектричні струми. Знайдено і проаналізовано вираз для поперечної термо-е.р.с.

**Ключові слова:** замкнуті струми, термоерс, зонально-неоднорідне середовище, рівняння теплопровідності, розподіл потенціалу.

Стаття постуила до редакції 11.02.2003; прийнята до друку 26.09.2003.

Зонально-неоднорідне середовище (ЗНС) характерне складністю термоелектричних процесів, які в ньому протікають. Так, при наявності градієнта температури вздовж границі дотикання середовищ 1 і 2 (рис. 1), за умови електричної ізоляції бокових граней в ЗНС виникають замкнуті термоелектричні струми [1,2]. У [2] їх названо вихровими термоелектричними, а в [3-5] об'ємними струмами Зеєбека або струмами Хіресе. Було запропоновано використовувати явище замкнутих струмів для визначення товщини металевих шарів біметалевих стрічок [1], а поперечну до градієнта температури термо-е.р.с. - для виявлення неоднорідностей контактуючих середовищ [2,3]. Відомі також роботи [6,7], де ЗНС розглядається з точки зору джерела електрорушійної сили. В [8] розраховано електрорушійну силу короткозамкнутого термоелемента, виготовленого із ЗНС.

У даній роботі замкнуті струми в ЗНС досліджуються для двох випадків. В першому – замкнуті струми вивчаються при теплових граничних умовах, які раніше не розглядалися, в другому – одержано аналітичний розв'язок сформульованої в [2] задачі. Розглянемо перший випадок.

ЗНС складається з двох ізотропних матеріалів у вигляді пластинок 1 і 2 (з незалежними від температури і координат кінетичними коефіцієнтами), які знаходяться між собою в ідеальному тепловому та електричному контакті (рис. 1).

На верхню грань ( $y = b$ ) ЗНС падає стаціонарний тепловий потік густиною  $q$ , нижня ( $y = 0$ ) грань адіабатично ізолювана від зовнішнього середовища, а торцеві ( $x = -c$  і  $x = a$ ) грані знаходяться в

ізотермічному контакті з термостатом при температурі  $T_0$ . Як і в [1,2] вважається, що ЗНС електроізолюване від зовнішнього середовища. Рівняння теплопровідності має вигляд

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$T_i = T_i(x, y)$  – температура точки  $(x, y)$   $i$ -ої області ( $i = 1, 2$ ). Граничні умови

$$\kappa_i \frac{\partial T_i(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

означають адіабатичну ізоляцію нижньої грані ЗНС, а

$$T_1(-c, y) = T_2(a, y) = T_0 \quad (3)$$

ізотермічний контакт бокових граней з термостатом при температурі  $T_0$ .

$$q = \kappa_i \frac{\partial T_i(x, b)}{\partial y} \quad (4)$$

густина потоку тепла, що падає на грань  $y = b$ . Неперервність теплового потоку і температури на границі областей 1 і 2 ( $x = 0$ ) представимо як

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1(0, y)}{\partial x} = \kappa_2 \frac{\partial T_2(0, y)}{\partial x}, \quad (5)$$

$$T_1(0, y) = T_2(0, y), \quad (6)$$

де  $\kappa_1, \kappa_2$  – питомі теплопровідності матеріалів областей 1 і 2. Зауважимо, що сформульована тепла частина задачі є наближеною: в рівнянні (1) знехтувано теплом Джоуля як нехтовно малою, а в

(5) – теплом Пельтье з тієї ж причини. Для сучасних термоелектричних матеріалів це наближення обґрунтовувалось і використовувалось, наприклад, в

[3-6].

Розв'язок рівняння (1) подамо у вигляді

$$T_1(x, y) = T_0 + \frac{q}{2\kappa_1 b} (y^2 - x^2) + B_{i0}x + C_{i0} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{in}(x) \cos \delta_n y,$$

де  $\delta_n = n\pi/b$ , останній член - це сума ряду Фур'є за косинусами, за винятком нульового члена; функція  $-\frac{q}{2\kappa_1 b}x^2 + B_{i0}x + C_{i0}$  є нульовим членом ряду

Фур'є і разом з функцією  $T_0 + \frac{q}{2\kappa_1 b}y^2$  задовольняє

рівняння (1);  $B_{i0}$  і  $C_{i0}$  – постійні. Представлений розв'язок задовольняє рівняння (1), а також граничні умови (2) і (4).

Задовольнимо умови (3), (5),(6). Для цього запишемо розв'язок у вигляді

$$T_1(x, y) = T_0 + \frac{q}{2\kappa_1 b} F_0 + \frac{q}{\kappa_1 b} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos \delta_n y - \frac{q}{2\kappa_1 b} x^2 + B_{i0}x + C_{i0} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{in}(x) \cos \delta_n y,$$

де  $F_0 = \frac{2}{3}b^2$  – нульовий член суми ряду Фур'є за косинусами функції  $y^2$ , а  $F_n$  – решта коефіцієнтів розкладу цієї ж функції в ряд Фур'є.

Позначимо

$qF_0 / (2\kappa_1 b) + C_{i0} = D_{i0}$ , а  $B_{i0}, B_{20}, D_{10}$  і  $D_{20}$  оберемо з умов

$$-\frac{q}{2\kappa_1 b}c^2 - B_{i0}c + D_{i0} = 0, \quad D_{10} = D_{20},$$

$$-\frac{q}{2\kappa_1 b}a^2 + B_{20}a + D_{20} = 0, \quad \kappa_1 B_{i0} = \kappa_2 B_{20}.$$

Звідси одержуємо для них вирази

$$B_{i0} = -\frac{q}{2b\kappa_1} \frac{c^2\kappa_2 - a^2\kappa_1}{c\kappa_2 + a\kappa_1},$$

$$B_{20} = -\frac{q}{2b\kappa_2} \frac{c^2\kappa_2 - a^2\kappa_1}{c\kappa_2 + a\kappa_1},$$

$$D_{10} = D_{20} = \frac{qac}{2b} \frac{c+a}{c\kappa_2 + a\kappa_1}.$$

Тоді

$$T_1(x, y) = T_0 + D_{i0} + \frac{q}{2\kappa_1 b} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos \delta_n y - \frac{q}{2\kappa_1 b} x^2 + B_{i0}x + \sum_{n=1}^{\infty} f_{in}(x) \cos \delta_n y,$$

де

$$f_{in}(x) = A_{in} \exp(\delta_n x) + B_{in} \exp(-\delta_n x);$$

$A_{in}, B_{in}$  – постійні інтегрування, які знаходяться з граничних умов

$$\frac{q}{2\kappa_1 b} F_n + A_{1n} \exp(-\delta_n c) + B_{1n} \exp(\delta_n c) = 0,$$

$$\frac{q}{2\kappa_2 b} F_n + A_{2n} \exp(\delta_n a) + B_{2n} \exp(-\delta_n a) = 0,$$

$$\frac{q}{2\kappa_1 b} F_n + A_{1n} + B_{1n} = \frac{q}{2\kappa_2 b} F_n + A_{2n} + B_{2n},$$

$$\kappa_1 (A_{1n} - B_{1n}) = \kappa_2 (A_{2n} - B_{2n}),$$

де

$$F_n = \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} b^2.$$

В результаті отримаємо

$$A_{1n} = -\frac{q}{2\kappa_1 b} F_n \exp(\delta_n c) - B_{1n} \exp(2\delta_n c),$$

$$A_{2n} = -\frac{q}{2\kappa_2 b} F_n \exp(-\delta_n a) - B_{2n} \exp(-2\delta_n a),$$

$$B_{1n} = \frac{\frac{q}{2b} F_n \left[ (1 - e^{-\delta_n a})^2 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} (1 - e^{\delta_n c}) (1 + e^{-2\delta_n a}) + e^{\delta_n c} (1 - e^{-2\delta_n a}) \right]}{\kappa_2 (1 - e^{2\delta_n c}) (1 + e^{-2\delta_n a}) - \kappa_1 (1 + e^{2\delta_n c}) (1 - e^{-2\delta_n a})},$$

$$B_{2n} = \frac{\frac{q}{2b} F_n \left[ (1 - e^{-\delta_n c})^2 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} (1 - e^{-\delta_n a}) (1 + e^{2\delta_n c}) + e^{-\delta_n a} (1 - e^{2\delta_n c}) \right]}{\kappa_1 (1 - e^{-2\delta_n a}) (1 + e^{2\delta_n c}) - \kappa_2 (1 + e^{-2\delta_n a}) (1 - e^{2\delta_n c})}.$$

Сформулюємо далі електричну частину задачі. Густина струму описується компонентами

$$j_1^{(i)} = -\sigma_i \frac{\partial}{\partial x} (\psi_i + \alpha_i T_i),$$

$$j_2^{(i)} = -\sigma_i \frac{\partial}{\partial y} (\psi_i + \alpha_i T_i), \quad (7)$$

які в стаціонарних умовах задовольняють рівняння неперервності

$$\frac{\partial j_1^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial j_2^{(i)}}{\partial y} = 0,$$

з якого одержуємо рівняння для потенціалу

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

де  $\psi_i = \frac{1}{e} \mu_i$ ;  $e$  – елементарний заряд,

$\mu_i$  – електрохімічний потенціал. Подамо розв'язок цього рівняння у вигляді

$$\psi_i(x, y) = -\alpha_i T_i + \varphi_{i0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{in}(x) \cos \delta_n y, \quad (9)$$

де  $\varphi_{i0}(x)$ ,  $\varphi_{in}(x)$  – коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є за косинусами. Розв'язок (9) задовольняє (8) за таких умов

$$\varphi_{i0}''(x) = 0, \quad \varphi_{in}''(x) - \delta_n^2 \varphi_{in}(x) = 0,$$

звідки знаходимо

$$\varphi_{i0}(x) = K_{i0}x + L_{i0},$$

$$\varphi_{in}(x) = G_{in} e^{\delta_n x} + H_{in} e^{-\delta_n x}, \quad n \geq 1,$$

де  $K_{i0}, L_{i0}, G_{in}, H_{in}$  – постійні інтегрування, які знайдемо з граничних умов

$$\left. \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right|_{y=b} = -\frac{\alpha_i}{\kappa_i} q, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 + \alpha_1 T_1) \right|_{x=-c} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} (\psi_2 + \alpha_2 T_2) \right|_{x=a} = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_1 \left. \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 + \alpha_1 T_1) \right|_{x=0} = \sigma_2 \left. \frac{\partial}{\partial x} (\psi_2 + \alpha_2 T_2) \right|_{x=0}, \quad (13)$$

$$\psi_1|_{x=0} = \psi_2|_{x=0}, \quad (14)$$

що означають: (10), (11) – електричну ізоляцію нижньої і верхньої граней ЗНС; (12) – електроізоляцію торцевих граней ( $x = -c$ ,  $x = a$ ); (13) і (14) – неперервність електричного струму і потенціалу на границі  $x = 0$ .

Виходячи з умов (10)-(14), одержимо вирази для постійних інтегрування  $K_{i0} = K_{20} = 0$ ,  $L_{i0}$  і  $L_{20}$  зв'язані співвідношенням:

$$L_{10} = L_{20} + (\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 + D_{10}),$$

і далі

$$G_{1n} = -\frac{\sigma_2 \Delta_n (e^{-2\delta_n a} - 1) e^{2\delta_n c}}{\sigma_2 (e^{-2\delta_n a} - 1) (e^{2\delta_n c} + 1) - \sigma_1 (e^{-2\delta_n a} + 1) (e^{2\delta_n c} - 1)},$$

$$G_{2n} = -\frac{\sigma_1 \Delta_n (e^{2\delta_n c} - 1) e^{-2\delta_n a}}{\sigma_2 (e^{-2\delta_n a} - 1) (e^{2\delta_n c} + 1) - \sigma_1 (e^{-2\delta_n a} + 1) (e^{2\delta_n c} - 1)},$$

$$H_{1n} = -\frac{\sigma_2 \Delta_n (e^{-2\delta_n a} - 1)}{\sigma_2 (e^{-2\delta_n a} - 1) (e^{2\delta_n c} + 1) - \sigma_1 (e^{-2\delta_n a} + 1) (e^{2\delta_n c} - 1)},$$

$$H_{2n} = -\frac{\sigma_1 \Delta_n (e^{2\delta_n c} - 1)}{\sigma_2 (e^{-2\delta_n a} - 1) (e^{2\delta_n c} + 1) - \sigma_1 (e^{-2\delta_n a} + 1) (e^{2\delta_n c} - 1)},$$

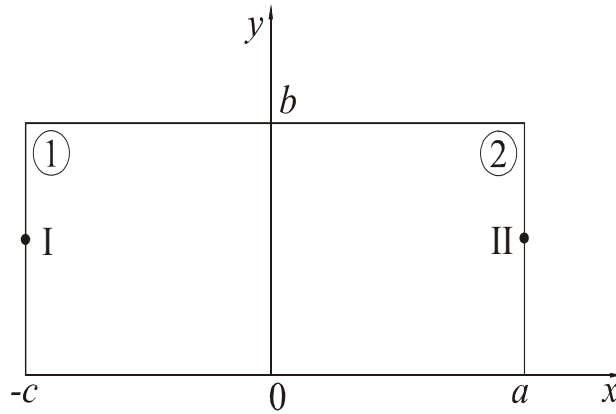


Рис. 1. Принципова схема зонально-неоднорідного середовища.

де  $\Delta_n = -(\alpha_1 - \alpha_2) \left( \frac{q}{2\kappa_1 b} F_n + f_{in}(0) \right)$ .

Отже, в ЗНС при вказаних теплових і електричних умовах мають місце замкнуті струми.

Знайдемо далі різницю потенціалів між точками I

і II (рис.1)  $\Delta\Psi_{II} = \varepsilon$ , яку можна інтерпретувати як електрорушійну силу термоелемента. Вираз для  $\varepsilon$  має вигляд

$$\varepsilon = -\Delta\alpha T_0 + L_{10} - L_{20} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_n \left[ \sigma_2 (e^{-2\delta_n c} - 1) e^{\delta_n c} - \sigma_1 (e^{2\delta_n c} - 1) e^{-\delta_n c} \right]}{\sigma_2 (e^{-2\delta_n a} - 1) (e^{2\delta_n c} + 1) - \sigma_1 (e^{-\delta_n a} + 1) (e^{\delta_n c} - 1)} \cos \frac{\delta_n b}{2}, \quad (15)$$

де  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ .

Для випадку, коли  $e^{\delta_n c}$  і  $e^{\delta_n a} \ll 1$  сума в (15) є величиною малою і нею можна знехтувати. Так, наприклад, при  $\Delta\alpha = 500 \text{ мкВ/К}$ ,

$\kappa_1 \approx \kappa_2 \approx 10^{-2} \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}$ , сума для її

$a = c = 3 \text{ см}$ ,  $b = 0,2 \text{ см}$ ,  $q = 1 \text{ Вт/см}^2$

перших трьох членів складає тисячні долі від першого доданку. Для  $\varepsilon$  у цьому випадку одержуємо

$$\varepsilon = \frac{\Delta\alpha \cdot q \cdot a c (a + c)}{2b \kappa_1 + \kappa_2}. \quad (16)$$

Звідси видно, що в цьому випадку електрорушійна сила не залежить від температури термостата, питомих електропровідностей  $\sigma_1, \sigma_2$ , а визначається різницею термо-ерс, питомими теплопровідностями  $\kappa_1, \kappa_2$ , густиною падаючого теплового потоку і залежить від розмірів  $a, b$  і  $c$  розглянутих пластинок 1 і 2. Числове значення для указаних параметрів складає величину  $\varepsilon = 1,15 \text{ В}$ .

Порівняємо знайдену термо-ерс із термо-ерс анізотропного термоелемента, в якого поперечна термоерс залежить від розмірів:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta\alpha}{2\kappa} a q, \quad (17)$$

де  $\Delta\alpha$  - анізотропія термо-ерс,  $a$  - довжина термоелемента. Візьмемо  $\Delta\alpha = 500 \text{ мкВ/К}$ ,  $a = 6 \text{ см}$ ,  $q = 1 \text{ Вт/см}^2$ ,  $\kappa = 10^{-2} \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}$ , одержимо  $\varepsilon_a = 0,15 \text{ В}$ . Отже, одержана нами термо-ерс майже

на порядок більша. При цьому треба зауважити, що анізотропія термо-ерс не буває більшою за  $300 \text{ мкВ/К}$ .

Розглянемо другий випадок. ЗНС у цьому випадку піддано тепловому впливу з допомогою двох термостатів при температурах  $T_0$  і  $T_b$ , торці з  $x = a$  і  $x = -c$  адіабатично ізольовані від зовнішнього середовища. Теплова частина задачі у цьому випадку має простий розв'язок: розподіл температури одновимірний -

$$T(y) = T_0 + \frac{\Delta T}{b} y, \quad (18)$$

де  $\Delta T = T_b - T_0$ ,  $T_b = T_i(x, b)$ ,  $T_0 = T_i(x, 0)$ .

Рівняння для розподілу потенціалу  $\Psi_i$  мають вигляд (8), а граничні умови такі

$$\left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \right|_{y=0} = -\alpha_i \tau, \quad \left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right|_{x=-c} = \left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad (19)$$

$$\Psi_1|_{x=0} = \Psi_2|_{x=0}, \quad \sigma_1 \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \sigma_2 \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right|_{x=0},$$

де  $\tau = \Delta T / b$  - градієнт температури. Розв'язок задачі (8), (19) має вигляд

$$\Psi_i(x, y) = -\alpha_i \tau y + \Psi'_{i0} + \sum_{n=1}^{\infty} (G'_n e^{\delta_n x} + H'_n e^{-\delta_n x}) \cos \delta_n y, \quad (20)$$

де  $\Psi'_{i0}, G'_n, H'_n$  - постійні інтегрування

$$G'_{in} = H'_{in} e^{2\delta_n c}, \quad G'_{2n} = H'_{2n} e^{-2\delta_n c}, \quad H'_{2n} = \Delta\alpha\tau C_n \sigma_1 (1 - e^{-2\delta_n c}) / P_n,$$

$$H'_{in} = \Delta\alpha\tau C_n \sigma_2 (1 - e^{-2\delta_n c}) (1 - e^{-2\delta_n a}) / P_n, \quad \text{де}$$

$$P_n = \left[ \sigma_2 (1 - e^{-2\delta_n a}) (1 + e^{2\delta_n c}) - \sigma_1 (1 + e^{-2\delta_n a}) (1 - e^{2\delta_n c}) \right] (1 - e^{2\delta_n c}),$$

$\Psi'_{10} - \Psi'_{20} = \Delta\alpha\tau C_0$ ;  $C_0, C_n$  – коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є за косинусами. Знаючи розподіл потенціалів (20), можна знайти компоненти  $j_1^{(i)}$  і  $j_2^{(i)}$ , які описуватимуть густину замкнучих струмів в ЗНС.

Вираз для різниці потенціалів між точками I і II (рис. 1) матиме вигляд

$$\Delta\varphi_{I,II} = -\Delta\alpha\tau b / 2 - S,$$

де

$$S = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\alpha C_n \tau (1 - e^{-2\delta_n c}) \left[ \sigma_1 e^{-\delta_n a} (1 - e^{2\delta_n c}) - \sigma_2 e^{\delta_n c} (1 - e^{-2\delta_n a}) \right]}{(1 - e^{2\delta_n c}) \left[ \sigma_2 (1 - e^{-\delta_n a}) (1 + e^{2\delta_n c}) - \sigma_1 (1 + e^{-\delta_n a}) (1 - e^{2\delta_n c}) \right]}.$$

При великих  $a$  і  $c$  і малому  $b$  сума не грає помітної ролі у виразі для  $\Delta\varphi_{I,II}$  і нею можна знехтувати, тобто матимемо

$$\Delta\varphi_{II,I} = -\Delta\alpha\Delta T / 2.$$

Отже  $\Delta\varphi_{II,I}$  не залежить від розмірів  $a, b$  і  $c$ . Це

так звана термопарна термоерс. Однак вона є пасивною, оскільки виробляти струм у зовнішньому колі не може. На закінчення відзначимо, що явище замкнучих струмів в ЗНС можна використати для конструювання датчиків теплових потоків.

- [1] А. Hirose. // *J. Just. Electr. Eng. Jap*, **74**(9), pp. 1056-1062 (1954).
- [2] Л.И. Анатычук, О.Я. Лусте. // *Известия ВУЗов*, **6**, сс. 134-136 (1969).
- [3] С.Л. Королюк, И.М. Пилат, А.Г. Самойлович, В.Н. Слипченко, А.А. Снарский, Е.Ф. Царьков. // *ФТП*, **7**(4), с. 725 (1973).
- [4] А.Г. Самойлович. // *Проблемы современной физики*. сс. 304-318 (1980).
- [5] А.А. Снарский. *Исследование вихревых термоэлектрических токов*: Дис.канд.ф.-м.н.: -Черновцы, 152 с. (1975).
- [6] А.А. Ашеулов, В.Г. Охрім. // *Термоэлектричество*, **4**, pp. 17-22 (2000).
- [7] *Термоэлементы и термоэлектрические устройства: Справочник* / Л.И. Анатычук. Наук. Думка, К., 768 с. (1979).
- [8] Е.А. Охрем, И.В. Проц. // *Термоэлектричество*, **3**, pp. 16-22 (2000).

V.G. Okhrem, A.A. Ascheulov<sup>1</sup>, O.A. Okhrem<sup>1</sup>

## Close-Mouthed Thermal-Electrical Currents and Transverse Thermal-E.M.F. on Electric-Isolation Band- Heterogeneous Environment

‘Yuri Fedjkovych’ Chernivtsi National University, 2, Kotsyubynsky Str., Chernivtsi, 58012, Ukraine  
E-mail: oe-dpt@chnu.com.ua

<sup>1</sup>Institute of Thermal-Electricity NAS and MES of Ukraine, p/b 86, Post, Chernivtsi, 58002, Ukraine

The distributions of temperature and electric potential on band- heterogeneous environment with close-mouthed thermal-electrical currents are calculated. The expression for the transverse thermal-e.m.f. is found.