УДК 621.315.592

А.А. Ащеулов, В.Г. Охрем, О.А. Охрем

Коефіцієнт корисної дії термоелемента з боковим теплообміном

Інститут термоелектрики, А/с 86, Головпошта, Чернівці, 58002,
Чернівецький національний університет, вул. Коцюбинського,2, Чернівці, 58012

Побудована теорія навантаженого термоелемента з боковим теплообміном. Розраховано розподіл температури та коефіцієнт корисної дії термоелемента, проведено аналіз одержаних результатів.

Ключові слова: термоелемент, коефіцієнт корисної дії, тепловий потік, боковий теплообмін, термоерс.

Стаття поступила до редакції 27.08.2002; прийнята до друку 23.09.2002

Сучасні термоелементи, які складаються з двох гілок p- і n-типу провідності, зарекомендували себе з найкращого боку. Термоелемент – це компактна конструкція, в якій гілки розташовані паралельно одна одній і з'єднані комутаційною шиною. Детально вивчені термоелектричні процеси, що протікають в термоелементах. Розроблена технологія виготовлення матеріалів гілок та інших елементів, а також технологія їх зборки [1].

Однак, деколи буває необхідно гілки розташувати не паралельно одна одній, а в лінію – це термоелемент з боковим теплообміном (ТБТ). Така конструкція може мати деякі переваги. Зокрема, відпадає необхідність у використанні комутаційної шини. Треба зазначити, що при цьому змінюються фізичні процеси, які протікають в термоелементі. Тому виникає необхідність у створенні відповідної теорії, що і зроблено в даній роботі.

Схема навантаженого ТБТ подана на рис. 1. Гілки 1 і 2 виготовлені з різних матеріалів, розташовані вздовж осі x; a і c – довжини гілок, b – висоти. Розмір вздовж осі z позначено через h. Вважається, що матеріали гілок ізотропні і однорідні, з незалежними від температури кінетичними коефіцієнтами. Потік тепла густиною q поступає на верхню грань ($y = b$) ТБТ, нижня грань ($y = 0$) адіабатично ізольована від зовнішнього середовища. Торці $x = -c$ і $x = a$ знаходяться в ідеальному тепловому і електричному контактах з термостатом при температурі T_0. Термостат виготовлений з матеріалу з високими значеннями електро- і теплопровідностей (наприклад, міді), так що забезпечуються умови постійності температури на торцьових гранях, а також умова одновимірного розподілу електричного струму. Останнє наближення застосовувалось, наприклад, в працях [2,3].

При вказаному тепловому режимі ТБТ тепловий потік і розподіл температури в його об'ємі будуть двовимірними. Отже, задача перш за все полягатиме у знаходженні розподілу температури.

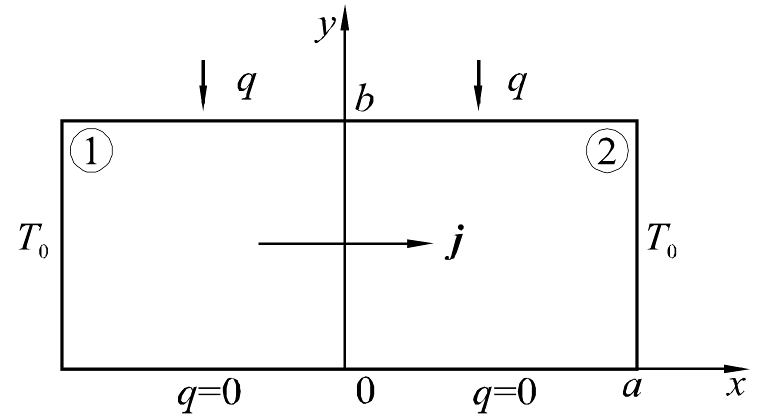

Рис. 1. Принципова схема навантаженого ТБТ.

I. Розподіл температури

Узагальнене рівняння теплопровідності має вигляд

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}+\gamma_i=0, \qquad (1.1)$$

де $\gamma_i=\rho_i j^2/\kappa_i$; ρ_i,κ_i – питомі опір і теплопровідність, i – номер гілки.

Граничні умови

$$\kappa_i\frac{\partial T_i(x,b)}{\partial y}=q, \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial T_i(x,0)}{\partial y}=0, \qquad (1.3)$$

$$T_1(-c,y)=T_0, \qquad T_2(a,y)=T_0 \qquad (1.4)$$

$$-\kappa_1\frac{\partial T_1(0,y)}{\partial x}+\alpha_1 jT_1(0,y)=-\kappa_2\frac{\partial T_2(0,y)}{\partial x}+\alpha_2 jT_2(0,y), \qquad (1.5)$$

$$T_1(0,y)=T_2(0,y), \qquad (1.6)$$

де α_i – термоерс, j – густина струму (рис. 1)

Розв'язок рівняння (1.1) подамо у вигляді

$$T_i(x,y)=-\frac{q}{2\kappa_i b}\left(x^2-y^2\right)+A_i x+B_i-\frac{\gamma_i x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{in}e^{\delta_n x}+B_{in}e^{-\delta_n x}\right)\cos\delta_n y, \qquad (1.7)$$

де $\delta_n=n\pi/b$, A_i,B_i,A_{in},B_{in} – постійні інтегрування. Розв'язок (1.7) задовольняє рівняння (1.1), а також граничні умови (1.2) і (1.3). Постійні інтегрування A_i,B_i,A_{in},B_{in} знайдемо з граничних умов (1.4)-(1.6), які подамо в явному вигляді

$$\frac{q}{2\kappa_1 b}\left(y^2-c^2\right)-A_1c+B_1-\frac{1}{2}\gamma_1c^2+\sum_{n=1}^{\infty}f_{1n}(-c)\cos\delta_n y=T_{0,}$$

$$\frac{q}{2\kappa_2 b}\left(y^2-a^2\right)-A_2c+B_2-\frac{1}{2}\gamma_2a^2+\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n}(a)\cos\delta_n y=T_{0,}$$

$$-\kappa_1\left(A_1+\sum_{n=1}^{\infty}f'_{1n}(0)\cos\delta_n y\right)+\Delta\alpha j\left[\frac{q}{2\kappa_1 b}\left(D_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos\delta_n y\right)+B_1+\sum_{n=1}^{\infty}f_{1n}(0)\cos\delta_n y\right]=$$

$$=-\kappa_2\left(A_2+\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n}{}'(0)\cos\delta_n y\right),$$

$$B_1+\frac{q}{2\kappa_1 b}\left(D_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos\delta_n y\right)+\sum_{n=1}^{\infty}f_{1n}(0)\cos\delta_n y=$$

$$B_2+\frac{q}{2\kappa_2 b}\left(D_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos\delta_n y\right)+\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n}(0)\cos\delta_n y,$$

де $\Delta\alpha=\alpha_1-\alpha_2$, $f_{in}(x)=A_{in}e^{\delta_n x}+B_{in}e^{-\delta_n x}$, $D_n=\left((-1)^n-1\right)4b^2/(\pi n)^2$

– коефіцієнти розкладу функції y^2 в ряд Фур'є за косинусами, $D_0=(2/3)b^2$. A_1,A_2,B_1,B_2 – довільні константи, тому їх можна обрати будь-яким чином. Оберемо їх з умов

$$-\kappa_1 B_1+\Delta\alpha j\left(\frac{q}{2\kappa_1 b}D_0+B_1\right)=-\kappa_2 A_2,$$

$$B_1 + \frac{q}{2\kappa_1 b} D_0 = B_2 + \frac{q}{2\kappa_2 b} D_0,$$

$$T_0 = \frac{q}{2\kappa_1 b}\left(D_0 - c^2\right) - A_1 c + B_1 - \frac{1}{2}\gamma_1 c^2,$$

$$T_0 = \frac{q}{2\kappa_2 b}\left(D_0 - a^2\right) - A_2 c + B_2 - \frac{1}{2}\gamma_2 a^2,$$

з яких одержимо

$$A_1 = \frac{1}{c}B_1 - \frac{1}{c}T_0 - \frac{1}{2}\gamma_1 c + \frac{q}{2\kappa_1 cb}\left(D_0 - c^2\right),$$

$$A_2 = -\frac{1}{a}B_1 + \frac{1}{a}T_0 + \frac{1}{2}\gamma_2 a - \frac{q}{2\kappa_1 ab}\left(D_0 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2}a^2\right),$$

$$B_2 = B_1 + \frac{qD_0}{2\kappa_1}\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2},$$

$$B_1 = \left[\left(a\kappa_1 + c\kappa_2\right)T_0 + \frac{1}{2}\left(\rho_1 c + \rho_2 a\right) j^2 ac + \frac{a}{2b}ac\left(a + c\right) - \frac{qD_0}{2\kappa_1 b}\left(a\kappa_1 + c\kappa_2 - \Delta\alpha jac\right)\right] / \left(a\kappa_1 + c\kappa_2 - \Delta\alpha jac\right).$$

З урахуванням знайдених виразів граничні умови подамо у вигляді

$$A_{1n}e^{-\delta_n c} + B_{1n}e^{\delta_n c} + \frac{q}{2\kappa_1 b}D_n = 0,$$

$$A_{2n}e^{\delta_n a} + B_{2n}e^{-\delta_n a} + \frac{q}{2\kappa_2 b}D_n = 0,$$

$$\kappa_1\delta_n\left(A_{1n} - B_{1n}\right) + \Delta\alpha j\left(\frac{q}{2\kappa_1 b}D_n + A_{1n} + B_{1n}\right) = -\kappa_2\delta_n\left(A_{2n} - B_{2n}\right),$$

$$\frac{q}{2\kappa_1 b}D_n + A_{1n} + B_{1n} = \frac{q}{2\kappa_2 b}D_n + A_{2n} + B_{2n}.$$

Це система чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої знайдемо константи $A_{1n}, B_{1n}, A_{2n}, B_{2n}$:

$$A_{1n} = -\frac{E_{1n}}{L_n}e^{2\delta_n c} - \frac{q}{2\kappa_1 b}D_n e^{\delta_n c},$$

$$A_{2n} = -\frac{E_{2n}}{L_n}e^{-2\delta_n a} - \frac{q}{2\kappa_2 b}D_n e^{-\delta_n a},$$

$$B_{1n} = \frac{E_{1n}}{L_n}, \qquad B_{2n} = \frac{E_{2n}}{L_n},$$

де

$$E_{1n} = \left[\frac{q\delta_n}{2b}D_n\left(e^{-\delta_n c} - e^{\delta_n c}\right) - \frac{\Delta\alpha jq}{2\kappa_1 b}D_n\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} - e^{\delta_n c}\right)\right] \times \left(1 - e^{-2\delta_n a}\right) +$$
$$+ \frac{q\kappa_2\delta_n}{2\kappa_1 b}\left(1 - e^{\delta_n c} - \kappa_1\frac{1 - e^{-\delta_n a}}{\kappa_2}\right)\left(1 + e^{-2\delta_n a}\right),$$

$$E_{2n} = \left[-\frac{q}{2\kappa_1 b}D_n\left(\kappa_1\delta_n - \Delta\alpha j\right)e^{\delta_n c} + \frac{q}{2\kappa_2 b}D_n\left(\kappa_2\delta_n e^{-\delta_n c} - \Delta\alpha j\right)\right]\left(1 - e^{2\delta_n c}\right) +$$
$$+ \frac{q}{2b}D_n\left(\frac{1 - e^{\delta_n c}}{\kappa_1} - \frac{1 - e^{-\delta_n a}}{\kappa_2}\right)\left[\kappa_1\delta_n\left(1 + e^{2\delta_n c}\right) + \Delta\alpha j\left(1 - e^{2\delta_n c}\right)\right],$$

$$L_n = -\kappa_2\delta_n\left(1 - e^{-2\delta_n a}\right)\left(1 - e^{2\delta_n c}\right) + \left[\kappa_1\delta_n\left(1 - e^{2\delta_n c}\right) + \Delta\alpha j\left(1 - e^{2\delta_n c}\right)\right]\left(1 - e^{-2\delta_n c}\right).$$

Отже, розглянутий навантажений ТБТ характеризується двовимірним розподілом температури. Він може працювати як в режимі генерації електричної енергії (тоді сила струму, що протікає в зовнішньому опорі R_e, складатиме $I = jbh$), так і в режимі охолодження (тоді I – це сила струму, що створюється в холодильнику зовнішнім джерелом).

II. Коефіцієнт корисної дії ТБТ

Основною характеристикою ТБТ у випадку генератора є коефіцієнт корисної дії (ККД)

$$\eta = \frac{q(a+c)h - Q_0}{q(a+c)}, \qquad (2.1)$$

де q(a+c)h – тепло,що поступає в ТБТ на верхню грань, а Q_0 – тепло, що стікає в термостат. Знаючи розподіл температури, можна підрахувати

$$Q_0 = -h\int_0^b q_1^{(1)}(x,y)\Big|_{x=-c} dy + h\int_0^b q_1^{(2)}(x,y)dy,$$

де

$$q_1 = -\kappa_i \frac{\partial T_i(x,y)}{\partial x} + \alpha_i T_i(x,y).$$

Виконавши математичні перетворення, одержимо

$$Q_0 = q(a+c)h + \Delta\alpha j\left(\frac{q}{2\kappa_1 b}D_0 + B_1\right)bh + (\rho_1 c + \rho_2 a)j^2 bh - \Delta\alpha j T_0 bh.$$

Далі, скориставшись виразами для B_i і (2.1), отримаємо

$$\eta = \frac{b}{q(a+c)}\left\{\Delta\alpha jac\left[\frac{q(a+c)}{2b} - \Delta\alpha j T_0 - \frac{1}{2}(\rho_1 c + \rho_2 a)j^2\right] - (\rho_1 c + \rho_2 a)(a\kappa_1 + c\kappa_2)j^2\right\} / (a\kappa_1 + c\kappa_2 + \Delta\alpha jac),$$

де враховано, що струм тече у від'ємному напрямку осі x (рис. 1), оскільки це генератор. З цього виразу видно, що величина η визначається в основному членом q(a+c) / 2b. Тому товщина ТБТ має бути малою, а q–великим. Припустимо, що $q(a+c)/(2b) >> \Delta\alpha j T_0 + \frac{1}{2}(\rho_1 c + \rho_2 a)j^2$ може виконуватись для достатньо малих j. Тоді, вважаючи також, що

$$\Delta\alpha jac\frac{q(a+c)}{2b} >> (\rho_1 c + \rho_2 a)(a\kappa_1 + c\kappa_2)j^2,$$

одержимо для ККД

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{\Delta\alpha jac}{a\kappa_1 + c\kappa_2 + \Delta\alpha ac}.$$

Наведені вище умови виконуються, якщо, наприклад,

$a = c = 1\,см$, $b = 0{,}1\,см$, $\rho_1 = \rho_2 = 10^{-3}\,Ом\cdot см$,
$\kappa_1 = \kappa_2 = 10^{-2}\,Вт/(см\cdot К)$, $\Delta\alpha = 10^{-4}\,В/К$,
$q = 2\,Вт/см^2$.

При цьому треба мати на увазі, що величина j обмежена величиною внутрішнього опору ТБТ. Оцінимо максимально можливе значення j. Для цього запишемо

$$\rho_i j dx = d(\mu_i + \alpha_i T_i), \qquad (2.2)$$

де μ_i – електрохімічний потенціал. Рівняння (2.2) випливає з узагальненого закону Ома. Інтегруючи (2.2) по x в межах від c до a і враховуючи, що спад напруги на термоелементі складає величину $jR_e bh$, одержимо

$$(\rho_1 c + \rho_2 a)j = -jR_e bh + \Delta\alpha(T_1(0,y) - T_0),$$

$$j(y) = \frac{\Delta\alpha(T_1(0,y) - T_0)}{\rho_1 c + \rho_2 a + R_e bh} = \frac{\Delta\alpha\Delta T}{\rho_1 c + \rho_2 a + R_e bh}.$$

При цьому, якщо товщина b ТБТ невелика, то можна вважати, що $\Delta T = Const$. При $R_e = 0$ (коротке замикання ТБТ) j буде максимальним

$$j_{max} = \frac{\Delta\alpha\Delta T}{\rho_1 c + \rho_2 a},$$

ΔT визначається величиною густини теплового потоку q. Якщо ΔT складає, наприклад, 20 К, то $j_{max} = 5 A/см^2$. Для указаних вище матеріальних і розмірних констант для максимального ККД одержуємо значення 6 %.

ТБТ може працювати і в режимі охолодження. У цьому випадку q(a+c)h – холодопродуктивність. У режимі нульової холодопродуктивності (q=0) буде мати місце максимальний перепад температури

$$\Delta T_{max} = \frac{\sqrt{1 + 2ZT_0} - 1}{Z},$$

де Z – термоелектрична ефективність. Цей вираз справедливий і для стандартного термоелемента.

Розглянутий ТБТ в режимі генерації струму може бути використаний, наприклад, в якості елемента автоматики.

В режимі охолодження ТБТ можна використовувати, наприклад, для охолодження сенсорів теплового випромінювання.

Ащеулов А.А. – доктор технічних наук, головний науковий співробітник;
Охрем В.Г. – кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Охрем О.А. – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник.

[1] Л.И. Анатычук. Термоэлемепнты и термоэлектрические устройства. Наукова думка, Киев, с. 761 (1979).
[2] В.Г. Охрем. Стационарный температурный режим анизотропного гальванотермомагнитного холодильного элемента. // *ИФЖ*, **40**(1), сс.75-81(1981).
[3] В.Г. Охрем, Е.А. Охрем. Стационарный эффект охлаждения анизотропного термоэлектрического холодильника. // *ИФЖ*, **73**(3), сс.650-653, (2000).

Ashceulov A.A., Okhrem V.G., Okhrem Ye.A.

Efficienthy of Thermoelement with Side Heat Exchange

Institute of Thermal-Electricity, P/b 86, Main-Post-Office, Chernivtsy, 58002,
Chernivtsy National University, 2, Kotsubynsky Str., Chernivtsy, 58012

A theory of load thermoelement with side heat exchange has been developed. The temperature distribution and thermoelement efficienthy has been calculated, obtained results have been analised.