

УДК 621.315.592

А.А. Ащеулов, В.Г. Охрем<sup>1</sup>

## Перепад температури в термоелектричному анізотропному середовищі, обумовлений ефектом вихрових термоелектричних струмів

*Інститут термоелектрики,  
вул. Дубинська, 9 а, 58029, Чернівці,  
<sup>1</sup>Чернівецький національний університет,  
вул. Коцюбинського, 2, 59012, Чернівці*

Розраховано розподіл температури і потенціал Лукоша в термоелектрично анізотропній пластині. Пояснено виникнення поперечного перепаду температури, а також ефект охолодження однієї з торцевих граней.

**Ключові слова:** термоерс, ефект Пельтьє, перепад температури, анізотропія, вихрові термоелектричні струми.

*Стаття поступила до редакції 03.12.2001; прийнята до друку 12.03.2002.*

У двовимірному анізотропному середовищі при наявності в ній стаціонарних теплових потоків мають місце вихрові термоелектричні струми (ВТС) [1-4]. Дослідження ВТС навіть у найпростішому випадку, коли середовище однорідне й анізотропне тільки за термоерс, тобто термоелектрично анізотропне (ТА), пов'язане із значними математичними труднощами: необхідно спільно розглядати узагальнене рівняння теплопровідності і рівняння неперервності, і в цьому їхня основна складність. При цьому в рівнянні теплопровідності не враховуються члени, що представляють тепло Бріджмена, Джоуля і Томсона на тій підставі, що ВТС малі. Такий підхід призводить до того, що тепла частина задачі розглядається окремо від електричної, що й у більшості випадків виправдовує себе. Однак, на нашу думку, цю методику необхідно застосовувати обережно, щоб не залишити без уваги яке-небудь явище, характерне для анізотропного середовища. У даній статті мова йде про такий ефект, ви-

пущений саме із зазначеної вище причини.

Розглянемо ТА кристалічну пластину, кристалографічна вісь якої нахилена до лабораторної осі під кутом  $\theta$  (рис. 1). Нехай грані  $y = 0$ ,  $x = b$  термостатовані при температурах  $T_0$  і  $T_b$  відповідно, а бічні грані  $x = 0$  і  $x = a$  адіабатично ізольовані від зовнішнього середовища, а  $a$  і  $b$  – розміри пластинки по осях  $x$  і  $y$  відповідно, 1 і 2 – термопари. Якщо виходити з того, що для однорідного, з не залежною від температури теплопровідністю ТА середовища тепла частина задачі записується у вигляді

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0,$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad T(x, b) = T_b, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0, x=a} = 0,$$

де останні дві умови є адіабатичною ізоляцією бічних граней, то розподіл температури в об'ємі пластини лінійний

$$T = T_0 + \frac{T_b - T_0}{b} y,$$

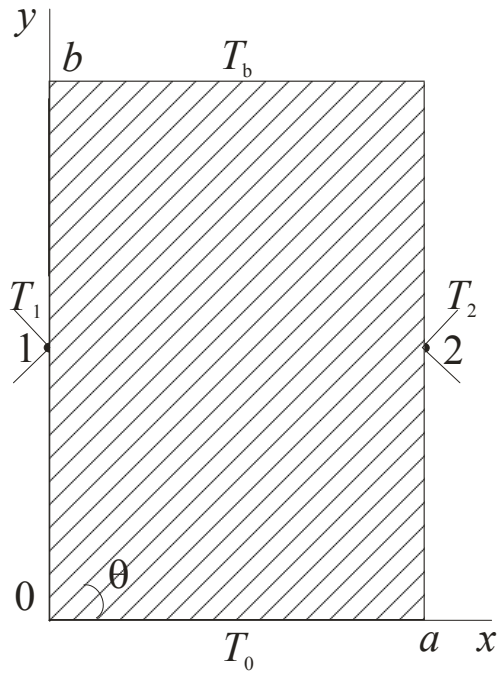


Рис. 1. Термоелектрично анізотропна пластинка.

і вихрових струмів при цьому не спостерігається. У дійсності цей результат не задовольняє умовам нашого експерименту, тобто термопари 1 і 2, розташовані на лінії паралельній осі  $x$ , показують різні температури (рис. 1). При цьому одна з температур менше  $T_0$ , наприклад,  $T_2 < T_0$ , а  $T_1 > T_0$  ( $T_b > T_0$ ), тобто має місце охолодження. Цей факт можна пояснити тільки переміщенням електричних зарядів, тобто в нашому випадку – наявністю ВТС. Тому необхідно врахувати цей ефект.

Для однорідного, з не залежними від температури кінетичними коефіцієнтами ТА середовища, узагальнене рівняння теплопровідності записується так [3,4]

$$\chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \alpha_{12} T \left( \frac{\partial j_1}{\partial y} + \frac{\partial j_2}{\partial x} \right) + \rho (j_1^2 + j_2^2) = 0, \quad (1)$$

де  $\chi$  і  $\rho$  – питомі теплопровідність і опір;  $\alpha_{12} = \Delta\alpha/2$ ,  $\Delta\alpha$  – анізотропія коефіцієнта термоерс;  $j_1$  і  $j_2$  – компоненти густини ВТС. При написанні (1) прийнято, що  $\theta = 45^\circ$ , це дає для тензора термоерс  $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ ,  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \Delta\alpha/2$ .

Запишемо далі вирази

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{1}{\rho} \left( E_1 - \alpha_{11} \frac{\partial T}{\partial x} - \alpha_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ j_2 &= \frac{1}{\rho} \left( E_2 - \alpha_{12} \frac{\partial T}{\partial x} - \alpha_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $E_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $\varphi$  – електростатичний потенціал і, виключив-

ши з (2) за допомогою рівності  $\frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{\partial E_2}{\partial x}$  потенціал  $\varphi$ , а також використовуючи потенціал Лукоша [2-4]  $j_1 = \frac{\partial H}{\partial y}$ ,  $j_2 = -\frac{\partial H}{\partial x}$ , одержимо рівняння відносно  $H(x,y)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\alpha_{12}}{\rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Підставивши в рівняння (1) замість  $j_1$  і  $j_2$  їхні вирази через  $H$ , одержимо:

$$\chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \alpha_{12} T \left( \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) + \rho \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] = 0. \quad (4)$$

Перший член є тепло, що виділяється в одиниці об'єму пластини за рахунок теплопровідності, другий і третій – теплоти

Бріджмена і Джоуля від ВТС.

Розглянемо далі граничні умови. „Електричні” граничні умови представимо як

$H(x, y)|_{\Gamma} = 0$  (на границі). Це означає умову електричної ізоляції бічних граней [1-4]. Теплові граничні умови – дві ізотермічних  $T(x, 0) = T_0$  і  $T(x, b) = T_b$ , і дві адіабатичних

$$\int_a^b \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} + \alpha_{12} T \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) dy = 0, \quad (5)$$

$$\int_a^b \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} - \alpha_{12} T \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=a} \right) dy = 0, \quad (6)$$

у яких другі члени під інтегралами описують тепло, що виділяється внаслідок поперечного ефекту Пельтьє від ВТС на лівій і правій бічних гранях відповідно, а інтегрування означає, що сумарне тепло, яке надходить на грань ззовні дорівнює нулю. Як випливає з викладеного, задача є нелінійною, але має аналітичний розв'язок.

Розв'язок рівняння (4) без теплот Бриджмена і Джоуля представимо у вигляді

$$T(x, y) = T_0 + \frac{T_b - T_0}{b} y + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\delta_n x} + B_n e^{-\delta_n x}) \sin \delta_n y, \quad (7)$$

де  $\delta_n = n\pi/b$ ,  $A_n$  і  $B_n$  – постійні інтегрування. Вираз (7) задовольняє ізотерміч-

ним граничним умовам. Підставляючи (7) у (3), одержимо:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{2\alpha_{12}}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 (A_n e^{\delta_n x} + B_n e^{-\delta_n x}) \sin \delta_n y. \quad (8)$$

Розв'язок (8) будемо мати у вигляді

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \sin \delta_n y. \quad (9)$$

Підставивши (9) у (8), одержимо наступне рівняння

$$\Phi''(x) - \delta_n^2 \Phi_n(x) = \frac{2\alpha_{12}}{\rho} \delta_n^2 (A_n e^{\delta_n x} + B_n e^{-\delta_n x}),$$

а його розв'язок

$$\Phi_n(x) = \frac{-2\alpha_{12}}{\rho} [(1 - 2\delta_n x) A_n e^{\delta_n x} + (1 + 2\delta_n x) B_n e^{-\delta_n x}] + F_n e^{\delta_n x} + G_n e^{-\delta_n x},$$

де  $F_n$  і  $G_n$  – постійні інтегрування.

Визначення постійних  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $F_n$  і  $G_n$  здійснюється з адіабатичних умов (5), (6) і граничних умов

$$H(x, y)|_{x=0} = 0, \quad (10)$$

В явному вигляді граничні умови (5), (6) і (10) після нескладних математичних перетворень записуються як

$$-\frac{\alpha_{12}}{2\rho} (A_n + B_n) + F_n + G_n = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_{12}}{2\rho}(1-\delta_n a)A_n e^{\delta_n a} - \frac{\alpha_{12}}{2\rho}(1+\delta_n a)B_n e^{-\delta_n a} + F_n e^{\delta_n a} + G_n e^{-\delta_n a} = 0, \\
 & \chi(A_n - B_n)(1 - (-1)^n) + \alpha_{12} \left[ \frac{\alpha_{12}}{2\rho}(A_n - B_n) + F_n - G_n \right] (T_0 - (-1)^n T_b) + \\
 & \quad + \frac{\alpha_{12}}{2} \left[ \frac{\alpha_{12}}{2\rho}(A_n - B_n)(A_n + B_n) + (F_n - G_n)(A_n + B_n) \right] \delta_n b = 0, \\
 & \chi(A_n e^{\delta_n a} - B_n e^{-\delta_n a})(1 - (-1)^n) - \alpha_{12} \left\{ \frac{\alpha_{12}}{2\rho} [A_n e^{\delta_n a} - B_n e^{-\delta_n a} + 2\delta_n a(A_n e^{\delta_n a} + B_n e^{-\delta_n a})] + \right. \\
 & \quad \left. + F_n e^{\delta_n a} - G_n e^{-\delta_n a} \right\} (T_0 - (-1)^n T_b) - \left[ \frac{\alpha_{12}^2}{4\rho} (A_n e^{\delta_n a} - B_n e^{-\delta_n a})(A_n e^{\delta_n a} + B_n e^{-\delta_n a}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\alpha_{12}}{2} (F_n e^{\delta_n a} - G_n e^{-\delta_n a})(A_n e^{\delta_n a} + B_n e^{-\delta_n a}) + \frac{\alpha_{12}^2}{2\rho} \delta_n a (A_n e^{\delta_n a} + B_n e^{-\delta_n a}) \right] \times \\
 & \quad \times (A_n e^{\delta_n a} + B_n e^{-\delta_n a}) \delta_n b = 0.
 \end{aligned}$$

З перших двох рівнянь знаходимо:

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{\alpha_{12}}{2\rho \operatorname{sh}(\delta_n a)} \left[ A_n (\operatorname{sh}(\delta_n a) - \delta_n a e^{-\delta_n a}) + B_n \delta_n a e^{-\delta_n a} \right], \\
 G_n &= \frac{\alpha_{12}}{2\rho \operatorname{sh}(\delta_n a)} \left[ A_n \delta_n a e^{\delta_n a} + B_n (\operatorname{sh}(\delta_n a) - \delta_n a e^{-\delta_n a}) \right].
 \end{aligned}$$

Підставивши  $F_n$  і  $G_n$  у два інших, одержимо систему рівнянь відносно  $A_n$  і  $B_n$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\operatorname{sh}(\delta_n a) - \delta_n a e^{\delta_n a}}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} Z \frac{\delta_n b}{2} A_n^2 - \frac{\operatorname{sh}(\delta_n a) - \delta_n a e^{-\delta_n a}}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} Z \frac{\delta_n b}{2} B_n^2 - \delta_n a \delta_n b Z A_n B_n + \\
 & \quad + \left[ 1 - (-1)^n + Z \left( 1 - \frac{\delta_n a}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} e^{\delta_n a} \right) (T_0 + (-1)^n T_b) \right] A_n - \left[ 1 - (-1)^n + \right. \\
 & \quad \left. + Z \left( 1 - \frac{\delta_n a}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} e^{-\delta_n a} \right) (T_0 + (-1)^n T_b) \right] B_n = 0, \\
 & \quad - \frac{Z}{4} \delta_n b \left( 2e^{2\delta_n a} + \frac{\delta_n a}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} e^{+\delta_n a} - \frac{\delta_n a}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} e^{3\delta_n a} \right) A_n^2 - \\
 & \quad - \frac{Z}{4} \delta_n b \left( 2e^{-2\delta_n a} - \frac{\delta_n a}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} e^{-\delta_n a} - \frac{\delta_n a}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} e^{-3\delta_n a} \right) B_n^2 - \\
 & \quad - \frac{Z}{2} \delta_n b \delta_n a \frac{e^{\delta_n a}}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} A_n B_n + \left\{ (1 - (-1)^n) e^{\delta_n a} - \frac{Z}{2} \left( 2e^{\delta_n a} + \delta_n a \left( 2e^{\delta_n a} - \frac{e^{2\delta_n a}}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} + 1 \right) \right) \right\} \times \\
 & \quad \times (T_0 - (-1)^n T_b) \left\{ A_n - \left( (1 - (-1)^n) e^{-\delta_n a} - \frac{Z}{2} \left( 2e^{-\delta_n a} - \delta_n a \left( 2e^{-\delta_n a} - \frac{e^{-2\delta_n a}}{\operatorname{sh}(\delta_n a)} - 1 \right) \right) \right) \right\} \times \\
 & \quad \times (T_0 - (-1)^n T_b) \left\{ B_n = 0, \right.
 \end{aligned}$$

$Z = \alpha_{12}^2 / (\chi\rho)$  – термоелектрична добротність. Запишемо ці рівняння у вигляді

$$aA_n^2 + bB_n^2 + cA_nB_n + dA_n + eB_n = 0,$$

дійсні величини.

$$a_1A_n^2 + b_1B_n^2 + c_1A_nB_n + d_1A_n + e_1B_n = 0,$$

З першого рівняння знаходимо

де коефіцієнти  $a, b, c, d, e, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1$  –

$$A_n = \frac{-(cB_n + d) \pm \sqrt{(cB_n + d)^2 - 4a(bB_n^2 + eB_n)}}{2a}.$$

$$\left\{ \frac{a_1^2}{2a} \left[ 2(cB_n + d)^2 - 4a(bB_n^2 + eB_n) \right] + b_1B_n^2 - \left( \frac{c_1B_n}{2a} + \frac{d}{2a} \right) (cB_n + d) + e_1B_n \right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{2a} \left[ 2(cB_n + d) + \frac{c_1B_n}{2a} + \frac{d_1}{2a} \right]^2 \left[ (cB_n + d)^2 - 4a(bB_n^2 + eB_n) \right].$$

Це рівняння четвертого ступеня, розв'язок якого можна представити в аналітичному вигляді [6]. Однак через надзвичайну громіздкість аналітично представити його не має змісту. Для нашого дослідження важливо, що  $A_n$  і  $B_n$  відмінні від нуля, що пояснює виникнення поперечного перепаду температури і зв'язаний з цим ефект охолодження однієї з граней анізот-

ропної пластини дією поперечного ефекту Пельтье в результаті протікання ВТС.

*А.А. Ащеулов – д.т.н., провідний науковий співробітник;  
В.Г. Охрем – к.ф.-м.н., доцент.*

- [1] А.Г. Самойлович, Л.Л. Коренблит. Вихревые токи в анизотропной среде // *ФТП.*, **3**(7-8), сс. 2054-2058 (1961).
- [2] W. Lukosz. Geschlossene elektrische Ströme in thermoelektrisch-anisotropen Kristallen // *Z. Naturforsch.*, **19a**(13), pp. 1599-1610 (1964).
- [3] А.А. Снарский. Исследование вихревых термоэлектрических токов. Автореф. дис. к-та ф.-м. наук: 01.04.10 / Черновицкий гос ун-т, Черновцы. 18 с. (1975).
- [4] Л.И. Анатыхук, О.Я. Лусте. Вихревые термоэлектрические токи и вихревые термоэлементы // *ФТП.*, **3**(5), сс. 817-832 (1976).
- [5] В.Н. Слипченко. Поперечный эффект Пельтье // *ФТП.*, **11**(8), сс. 1614-1615 (1977).
- [6] А.Г. Курош. *Курс высшей алгебры*. Наука, М. 365 с. (1960).

A.A. Ashcheulov, V.G. Okhrem<sup>1</sup>

## The temperature drop at the thermoelectric anisotropic environment, stimulated by rotational thermal electric currents

*Institute of the thermoelectricity,  
9 a, Dubinska St., Chernivtsy, 58029;  
<sup>1</sup>Yriy Fedjkovych Chernivtsy National University,  
2, Kotsyubynsky St., Chernivtsy, 59012*

The distribution of temperature and Lukosh potential of thermoelectric anisotropic plate have been calculated. The arising of the transverse temperature difference and the cooling effect of one of the end face plate has been explained.